Размерный оператор момента импульса $\hat{\boldsymbol{L}}$ вводится как

$$\hat{\boldsymbol{L}} = [\hat{\boldsymbol{r}} \mathrm{x} \hat{\boldsymbol{p}}]$$

А его проекции:

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y$$

$$\hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z$$

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$$

Давайте я расшифрую, чтобы точно было понятно. Чтобы взять проекцию L на ось абсцисс от волновой функции, нужно применить к ней оператор проекции импульса на ось ординат, к результату применить оператор аппликаты. Затем вернуться к начальной волновой функции, применить к ней оператор проекции импульса на ось аппликат, затем оператор ординаты. Наконец, вычесть одно из другого.

Проекции можно также написать, расписав оператор импульса:

$$\hat{L}_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Как мы видим, размерность такая же, как у приведённой h. Поэтому физики ввели безразмерный оператор момента, по определению равный $\hat{\boldsymbol{L}}$, делённый на приведённую h.

$$\hat{\boldsymbol{l}} = \hat{\boldsymbol{L}}/h$$

$$\hat{l}_x = -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\hat{l}_y = -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\hat{l}_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Коммутируют ли различные проекции оператора момента импульса? Глядя на их вид, кажется, что нет: там есть операторы координаты и импульса на одну и ту же ось, которую не коммутируют. Оказывается, что да, два оператора проекции момента импульса на разные оси не коммутируют:

$$\left[\hat{L}_x,\hat{L}_y\right]=-\hbar^2\left\{\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)-\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\}=$$

$$=-\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)=i\hbar\left[-i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]=i\hbar\hat{L}_z$$

Т.е. для всех проекций получаем:

$$\left[\hat{L}_x,\hat{L}_y\right]=i\hbar\hat{L}_z,\quad \left[\hat{L}_y,\hat{L}_z\right]=i\hbar\hat{L}_x,\quad \left[\hat{L}_z,\hat{L}_x\right]=i\hbar\hat{L}_y$$

(приведено док-во для размерных операторов момента, для безразмерных то же самое, только нет оператора момента).

Оператор квадрата углового момента. Его спектр. Коммутация с операторами проекций момента.

Безразмерный оператор квадрата углового момента (он же безразмерный оператор квадрата момента импульса) – это

$$\widehat{l^2}=\widehat{l_x}^2+\widehat{l_y}^2+\widehat{l_z}^2$$

На всякий случай замечу, что никакого оператора $\hat{l}$ нет, есть оператор $\widehat{l^2}$, где двойка обозначает не вторую степень, а образует своеобразный иероглиф с буквой «l» наподобие русской буквы «ы». Это чтобы вы не подумали, что существует некий оператор $\hat{l}$, который равен квадратному корню из оператора $\widehat{l^2}$**.** Разумеется, операция взятия квадратного корня из оператора не определена. (Её можно, впрочем, определить, только для $\widehat{l^2}$ это нафиг не нужно).

Конечно, существует и размерный оператор квадрата момента импульса:

$$\hat{L}^2=\hat{L}_x^2+\hat{L}_y^2+\hat{L}_z^2$$

Домноженный относительно безразмерного на квадрат приведённой Планка.

Оказывается, что $\widehat{l^2}$ и $\widehat{l_z}$ коммутируют. Тогда, по свойствам операторов, у них общие СФ! Правда, есть нюанс: СФ общие, а вот СЗ, которые соответствуют данным СФ, у операторов разные.

Итак, есть некие ВФ, которые являются СФ и для $\widehat{l_z}$**,** и для $\widehat{l^2}$. Если мы подействуем на неё $\widehat{l_z}$, то получим её же, домноженную на СЗ. Обозначим это СЗ за m:

$$\widehat{l_z}|\Psi>=m|\Psi>$$

Аналогично для СЗ $\widehat{l^2}$ обозначим за λ_l:

$$\widehat{l^2}|\Psi>=\lambda_l|\Psi>$$

Можно доказать (это подробно делается на ММФ), что λ_l, как и m, целое, но более того, представимо в виде

$\lambda_l=l(l+1)$, причём l по модулю не меньше m.

Таким образом, λ_l может принимать значения 2, 6, 12, 20…

СФ, отвечающие данным λ_l и m (часто вместо λ_l указывают l, они взаимозаменяемы), обозначают просто |lm> или Y_{lm}. Они ещё называются сферическими функциями.
Заметим, что эти самые Y_{lm} имеют вполне себе чёткий и явный вид.

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = (-1)^k \sqrt{\frac{(l-|m|)!\,(2l+1)}{(l+|m|)\,4\pi}}\, P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$$

где P_l^m - полином Лежандра ($m = 0, \pm1, \ldots, \pm l$),

$$k = \begin{cases} m, & m \geq 0 \\ 0, & m < 0 \end{cases}.$$

В качестве примера приведены сферические функции для l = 0, 1, 2.

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \qquad Y_{10} = \sqrt{\frac{9}{4\pi}}\cos\theta \qquad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) \qquad Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\varphi} \qquad Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\varphi}$$

$$Y_{1,m}(\theta,\varphi) = Y_{1,-m}(\theta,\varphi)$$

В 4-м семе явный их вид вам не нужен, а в 5-м нужен, не зря же вам ММФ читают ☺

Ещё один нюанс, который нам в дальнейшем потребуется. Мы уже убедились, что $\widehat{l_z}$, гораздо приятней записывается в цилиндрических координатах, нежели в полярных. А $\widehat{l^2}$? Если так подумать, квадрат момента импульса характеризует кинетическую энергию вращения:

$$W_K = \frac{L^2}{J}$$

В классическом случае.
Причём эта кинетическая энергия совсем не зависит от направления вращения, т.е. у нас нет выделенных осей.
Исходя из соображений выше, кажется, что оператор $\widehat{l^2}$ приятней всего записывается в цилиндрических координатах. Так оно и есть. Он записывается как

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}$$

Это доказывается выписыванием в сферических координатах $\widehat{l_x}$, $\widehat{l_y}$, $\widehat{l_z}$, возведением каждого в квадрат и суммированием.
Может показаться, что не слишком и приятно, но обратим внимание хотя бы на тот факт, что $\widehat{l^2}$ не зависит от R. Это очень приятно.